EXERCÍCIOS

1. Sejam A e B dois CBO. Mostre que a ordem lexicográfica sobre $A \times B$ é bem ordenada.

2. Sejam I, J conjuntos quaisquer de índices e A um conjunto arbitrário. Para qualquer função $\varphi : J \to I$, considere a função
$$\varphi^* : \prod_{i \in I} A \to \prod_{j \in J} A$$
definida como $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, para toda função escolha $f \in \prod_{i \in I} A$.

   (a) Se $I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 2, 3\}$ e $\varphi : J \to I$ definida como $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 2$ e $\varphi(3) = 1$. Descreva explicitamente como um terno ordenado em $A \times A \times A$ é aplicado em um par ordenado de $A \times A$ sob φ^*.

   (b) Se $I = J = \{1, \ldots, n\}$ e $\varphi : I \to I$ é uma função bijetora. Descreva em termos de n-uplas em $A \times \cdots \times A$ a função φ^*.

3. Sejam A um conjunto e $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Mostre que existe um subconjunto C de A tal que C está em correspondência biunívoca com B.

4. Sejam A um conjunto, $f : B \to C$ e $g : A \to C$ funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. Mostre que existe uma função $h : B \to A$ tal que $g \circ h = f$.

5. Mostre que a afirmação do Exemplo 4.15 implica o axioma da escolha.

6. Mostre que o axioma da escolha é equivalente a: Sejam A, B conjuntos e $F : A \to \mathcal{P}(B)$ uma função qualquer tal que $F(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in A$. Então existe uma função $f : A \to B$ tal que $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in A$.

2. Mostre que o Lema de Zorn é equivalente a: Sejam A um conjunto indutivamente e $a \in A$. Então A possui pelo menos um elemento maximal b tal que $b \geq a$.

3. Mostre que o Princípio Maximal de Hausdorff é equivalente a: Sejam A um poset e B uma cadeia de A. Então A contém uma cadeia maximal C tal que $B \subseteq C$.

4. Seja A um conjunto infinito. Mostre que A possui uma cobertura contável disjunta, isto é, existe uma família $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos contáveis disjuntos aos pares tal que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

5. Sejam A um conjunto e $\mathcal{A}$ um conjunto de subconjuntos de A. Diremos que $\mathcal{A}$ é de *carater finito* se $B \in \mathcal{A}$ se, e somente se, qualquer subconjunto finito de B pertence a $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{A}$ ordenado pela inclusão e suponhamos que $\mathcal{A}$ seja de carater finito.

   (a) Mostre que $\mathcal{A}$ é um conjunto indutivamente ordenado.

   (b) Mostre que $\mathcal{A}$ possui um elemento maximal.

6. Mostre que o axioma da escolha implica o Lema de Zorn.

7. Sejam G um grupo e S um subconjunto de G tal que $e_G \in S$. Mostre que a família

$$\mathcal{G} = \{H : H \text{ é um subgrupo de } G \text{ e } H \subseteq S\}$$

   possui pelo menos um elemento maximal.

8. Mostre que qualquer grupo contém um subgrupo abeliano maximal.

9. Mostre que qualquer ideal próprio I de um anel comutativo com identidade R está contido em um ideal maximal.

10. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.

    (a) Mostre que qualquer conjunto α de vetores LI está contido em uma base de V.

2. Mostre que qualquer poset não vazio possui um subconjunto bem ordenado maximal.

3. Seja A um poset não vazio tal que qualquer subconjunto bem ordenado possui uma cota superior. Mostre que A possui pelo menos um elemento maximal.

4. Um *filtro próprio* sobre um conjunto A é uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

   (a) A interseção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é um elemento de $\mathcal{F}$.

   (b) Se $X \in \mathcal{F}$ e $A \supseteq Y \supseteq X$, então $Y \in \mathcal{F}$.

   (c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

   Mostre que se A é infinito, então

   $$\mathcal{F} = \{X \subseteq A : A - X = X' \text{ é finito}\}$$

   é um filtro próprio. Além disso, mostre que qualquer filtro próprio está contido em um filtro maximal..

2. Mostre que qualquer poset não vazio possui um subconjunto bem ordenado maximal.

3. Seja A um poset não vazio tal que qualquer subconjunto bem ordenado possui uma cota superior. Mostre que A possui pelo menos um elemento maximal.

4. Um *filtro próprio* sobre um conjunto A é uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

   (a) A interseção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é um elemento de $\mathcal{F}$.

   (b) Se $X \in \mathcal{F}$ e $A \supseteq Y \supseteq X$, então $Y \in \mathcal{F}$.

   (c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

   Mostre que se A é infinito, então

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq A : A - X = X' \text{ é finito}\}$$

   é um filtro próprio. Além disso, mostre que qualquer filtro próprio está contido em um filtro maximal..

RESPOSTAS E/OU SOLUÇÕES